Scienza e filosofia

Logica / 1

Il mago dell'indimostrabile

Harvey Friedman studia con il massimo rigore le verità matematiche concrete (e utilissime) di cui però non si ha una dimostrazione

ILLUSTRAZIONE DI **Guido Scarabottolo**

di **Paola Liberace**

I logici, si sa, adorano i paradossi. Soltanto un logico matematico come Harvey Friedman (che ha tenuto due conferenze al dipartimento di Informatica dell'Università La Sapienza di Roma) poteva dedicare ai "teoremi indimostrabili" gran parte della sua carriera e del suo talento. Che non è poco, se pensiamo che Friedman a diciotto anni era professore a Stanford (per questo comparve nel Guinness dei Primati – *youngest Professor*), e che nel 1984 riceveva il prestigioso "Alan T. Waterman Award", offerto dalla National Science Foundation al miglior scienziato statunitense al di sotto dei 35 anni.

Ma cos'è un "teorema indimostrabile"? Non fa forse parte della definizione stessa di "teorema" il fatto di poter essere dimostrato rigorosamente? Certo che sì, ma una dimostrazione parte sempre da certe ipotesi, premesse o assiomi. Quali sono queste ipotesi? Tutto in matematica – numeri, funzioni, figure geometriche, grafi eccetera – può essere rappresentato come un insieme. E tutte le dimostrazioni della matematica classica possono condursi in base a un numero ben circoscritto di assiomi che riguardano l'esistenza di insiemi e le costruzioni possibili con gli insiemi. Questi assiomi (una decina!) formano la cosiddetta Teoria degli insiemi, una specie di teoria della teorie, una teoria generalissima in cui trovano più che comodamente posto l'analisi, la geometria, l'algebra e la Teoria dei numeri così come le conosciamo.

Ora: se scopriamo che un certo enunciato matematico *non può essere dimostrato* all'interno di questa teoria, non dobbiamo ragionevolmente chiamarlo – *tout court* – un enunciato "indimostrabile"? Se la nostra teoria non è contraddittoria (e se lo fosse sarebbe da buttare!), allora esistono moltissimi enunciati indimostrabili: se la teoria dimostra un teorema, l'opposto di quel teorema (la sua negazione) è indimostrabile. Ma che succede ora se scopriamo un enunciato indimostrabile e tale che anche la sua negazione non è dimostrabile nella teoria? «Esiste un insieme infinito di numeri reali che non può essere messo in corrispondenza biunivoca né con i naturali né con i reali», è senz'altro un enunciato puramente matematico: ci stiamo infatti chiedendo quanti sono i punti sulla retta reale. Nel 1963 Paul Cohen dimostra che sia questo enunciato che la sua negazione (ossia il Problema del continuo) sono indimostrabili, e per questo si aggiudica la Medaglia Fields, il massimo riconoscimento per un matematico.

Bene, dirà ancora il matematico *mainstream* (forse ora con una punta di invidia!): il Problema del continuo è una questione di interesse puramente teorico; ma siamo ben lontani dalla matematica del *mainstream*, quella vicina alle applicazioni, quella che si occupa di strutture estremamente *concrete*, e non di astrazioni degne di palati mistici. Siamo nel 1963, e la domanda: *Esistono verità indimostrabili che parlano di strutture concrete?* resta inevasa, obbligando il logico e il teorico degli insiemi a una imbarazzante evasività. Oggi, con la sua monografia di prossima pubblicazione per Springer – *Boolean Relation Theory and Incompleteness* – che raccoglie i risultati di dieci anni di lavoro, Harvey Friedman è in grado di rispondere positivamente a questa vecchia domanda, e di togliere i teorici dall'imbarazzo. Friedman ha individuato enunciati che hanno tutta l'aria di "innocenti" teoremi di matematica discreta ma che sono indimostrabili dagli assiomi della Teoria degli insiemi. Naturalmente Friedman è in grado di *dimostrare l'indimostrabilità* dei suoi enunciati (un altro amabile paradosso). Resta così dimostrata l'esistenza di verità matematiche *concrete* ma *indimostrabili*!

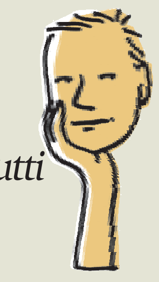
C'è dell'altro. Perché Friedman si ostina a chiamare *teoremi* i suoi enunciati? Ovvio: perché è in grado di darne una dimostrazione! In un estremo *tour de force* tecnico Friedman ha trovato il modo di *dimostrare* i suoi enunciati, ossia di indicarci – tra l'enunciato e la sua negazione (entrambi indimostrabili) – quale dei due è *vero*. Per questo ha usato ipotesi che trascendono quelle della normale Teoria degli insiemi. Si tratta di ipotesi che postulano l'esistenza di infinità incredibilmente grandi, note con il nome un po' inquietante di «Grandi Cardinali». Sono ben note agli addetti ai lavori, ma quanto di più lontano dal *mainstream* si possa immaginare. I risultati di Friedman dimostrano che queste ipotesi sono, in un certo senso, irrinunciabili, anche per certe parti della matematica concreta e del *mainstream*. Come ci è riuscito? La risposta è semplice. Scherza Friedman (ma non troppo!): «Sono andato nel futuro e ho riportato indietro, per voi, un esempio di come sarà la matematica tra mille anni». O forse tra duemila. Qualcuno potrebbe reagire come Gordan reagì – secondo la vulgata – alla dimostrazione di un famoso teorema di Hilbert: «Questa è teologia, non matematica!». Ma in questo caso Friedman potrebbe rispondere, con ragione: «E non potrebbe essere altrimenti».

Ragioni per un festival

Il Liceo "Arimondi-Eula" di Savigliano, la Provincia di Cuneo, il Comune di Savigliano presentano una mattinata di discussione su «L'uso della logica: nella didattica, nella sfera pubblica, nella vita quotidiana». L'incontro avrà luogo dalle ore 10 presso l'ex-Convento di Santa Monica, sede della Facoltà di Scienze della Formazione (polo di Savigliano) dell'Università di Torino. I lavori si intendono come preparatori per il primo Festival di logica che avrà luogo nell'autunno del prossimo anno. Introducono Gianna Gancia, Presidente della Provincia di Cuneo, Licia Viscusi, Assessore all'Istruzione, cultura, sanità e Pasquale Iezza, preside del Liceo "Arimondi-Eula". Interverrano Carlo Cellucci (Roma), Franca D'Agostini (Torino), Marcello Frixione (Genova) e Armando Massarenti (Il Sole 24 Ore).

Filosofia minima

di **Armando Massarenti**



Vero in tutti i mondi possibili

«Il genio compreso» è un bel titolo per un libro su «La filosofia di Saul Kripke» (Carocci, a cura di Andrea Borghini, con saggi di Achille Varzi, Marco Santambrogio, Christopher Hughes). Nato nel 1940, professore emerito a Princeton, Kripke è dagli anni 60 al centro del dibattito logico, con i suoi risultati rivoluzionari su logica modale e mondi possibili. Ci sono modi di riferirsi alle cose che cambiano da mondo a mondo. Per esempio se uso quella che Russell chiamava una «descrizione difinita» come «il presidente degli Stati Uniti», nel nostro mondo attuale sappiamo che è Obama, ma nel mondo di solo qualche anno fa avrebbe designato Bush. E possiamo immaginare altri mondi, letterari o cinematografici, in cui è, per esempio, Pinco Pallo. Ma se usiamo invece il nome proprio, Obama, riferendoci proprio a quell'Obama lì, allora in tutti i mondi possibili ci riferiremo sempre alla medesima entità. È possibile dimostrare che l'identità tra nome e oggetto è necessariamente vera. Kripke ha ridato vita all'idea metafisica di Leibniz (a lungo abbandonata) «vero in tutti i mondi possibili». Non solo. Ciò vale anche per i generi naturali. Se io scopro che l'acqua è H_2O, necessariamente lo sarà in ogni possibile mondo. Ci sono cioè verità necessarie «a posteriori». «Necessità» e «a priori» di Kant non coincidono. Ciò che scopriamo sul mondo ha spesso la potenza di un nome proprio. Quest'assunto però riguarda anche la finzione letteraria che, benché sia finta, è da considerarsi vera. Alcune tesi neurobiologiche sottolineano l'importanza, a livello evolutivo, della letteratura e della narratività in quanto attività che rendono il lettore capace di simulare infiniti mondi possibili in cui confrontarsi con l'esperienza del vivere. Quando si legge non si fugge dalla realtà, il cervello ne costruisce una nuova. Un pensiero in più da proporre ai nostri lettori che, partecipando al nostro gioco, si stanno scoprendo Oulipiani, cioè letterati potenziali. E metafisici.

Il gioco dell'Oulipo

«Lasciatevi divertire!». Era l'invito di due domenica fa a giocare con le regole e con le parole nello stile Oulipo. Grazie, cari lettori, per i vostri ircocervi, parole-valigia e paronomàsie. Continuano ad arrivarne moltissimi. Online ne trovate una selezione insieme alle regole del gioco e all'articolo su Oulipo e Oplepo. Qualche esempio. Alberto Moreni: LENTOMOLOGO = studioso di insetti pigri; Jacopo Viti: PARLAMENTIRE = occupazione a cui si dedicano i politici italiani. Continuate a giocare! http://www.ilsole24ore.com/cultura/domenica.shtml. Spedire a: letteratura.potenziale@ilsole24ore.com (oppure: a.massarenti@ilsole24ore.com)

Logica / 2

Frege oltre la tragedia degli insiemi

di **Carola Barbero**

Si sente spesso dire che non serve disperarsi tanto per le sfortune e le disgrazie della vita e che bisogna prenderla con filosofia. Che dire allora di un uomo che, nel turbine delle sventure e degli stenti, abbia appena finito di preparare per le stampe il secondo volume di un importante lavoro e riceva una lettera in cui Bertrand Russell lo informa della presenza in esso di una contraddizione? Sembrerebbe che, in questo caso, prenderla con filosofia non farebbe altro che peggiorare le cose. Come che sia, l'uomo in questione non si suicidò per la terribile scoperta, ma provò a scrivere una risposta. Correva l'anno 1902, l'uomo era Gottlob Frege, l'opera i *Principi dell'aritmetica* e il tentativo di risposta, poi pubblicato in appendice al secondo volume, è ancora oggi noto come *Frege's way out*.

La risposta non fu risolutiva, però ci fu. Segno che Frege cadde ma, come molti grandi uomini, cadde in piedi e con un certo stile, nonostante la critica di Russell sancisse il pieno fallimento del suo progetto di fondare la matematica sulla logica.

D'altra parte parliamo di uno dei maggiori pensatori (a tutto tondo, come si usava una volta, infatti era matematico, logico e filosofo) del XIX secolo, che scrisse a trentun anni la sua opera principale, l'*Ideografia*, la cui importanza nella storia della logica è stata paragonata a quella dei *Primi analitici* di Aristotele.

Tuttavia non di sole teorie vivono i grandi del pensiero, soprattutto quando sono anche professori: spesso infatti hanno bisogno di studenti che li seguano, magari che li correggano e che un domani, quando loro non ci saranno più, portino avanti le loro idee. Frege ebbe pochissimi allievi (era dura seguirlo mentre scriveva formule su formule alla lavagna nelle aule dell'Università di Jena) ma, tra quei pochi, due davvero eccezionali: uno diretto, Rudolf Carnap, che dedicò tutti i suoi sforzi a mettere in pratica la lezione imparata dal maestro (ricostruire in filosofia nuovi sistemi formali), e uno indiretto, che non seguiva le sue lezioni, ma che aveva letto i suoi libri e lo andava a trovare, Ludwig Wittgenstein, che ricevette dal maestro mancato il prezioso consiglio, seguito alla lettera in tutte le sue opere, di utilizzare gli esempi nel fare filosofia.

Nel suo bel libro Carlo Penco presenta questo classico con una rara semplicità ed eleganza, riuscendo al contempo a spiegare e a rendere interessante (non soltanto per gli addetti ai lavori, il che non è poca cosa) il pensiero di un autore che, nel corso di tutta la sua produzione, non fece altro che approfondire, chiarire, talvolta emendare, con coerenza e dedizione ammirevoli, i temi presentati in maniera così condensata nell'*Ideografia* (1879), e poi sviluppati nei *Fondamenti dell'aritmetica* (1884) e nei *Principi dell'aritmetica* (1893 e 1903), oltre che in una serie di altri lavori.

Si tratta di temi importanti che costituiscono un imprescindibile punto di partenza e di confronto per logici e filosofi: la teoria del concetto come funzione che ha come valori valori di verità, l'introduzione dei quantificatori (cioè di termini come "tutti" e "qualche") come espressioni funzionali di secondo livello, la critica allo psicologismo, la ricerca dei fondamenti della matematica, e infine l'introduzione della distinzione tra senso e riferimento, uno degli assi teorici fondamentali attorno ai quali si snoderanno gli studi di semantica formale del '900, da Carnap a Montague.

Nonostante ciò, Frege è ancora per molti un autore il cui unico merito è stato quello di avere tentato, fallendo, di fondare la matematica sulla logica. Per alcuni altri è anche colui che ha introdotto la differenza tra riferimento e senso, dove il riferimento è l'oggetto cui il nome si riferisce, mentre il senso è l'aspetto sotto il quale l'oggetto viene presentato, ragion per cui "la stella della sera" e "la stella del mattino" hanno sensi diversi e uno stesso riferimento, il pianeta Venere. Ma questo è davvero troppo poco per un autore che non solo ha segnato una svolta, ma che ancora oggi è al centro dei dibattiti e costituisce una costante fonte di ispirazione per gli studiosi. Forse vale la pena provare a conoscerlo davvero, magari ripartendo da Venere – «lo bel pianeto che d'amar conforta» diceva Dante nel Purgatorio – al quale ci si può riferire in molti modi e che ha gettato (senza avere peraltro ancora finito) così tanta luce sulle indagini filosofiche. Non lasciamoci intimorire dal professore severo che scrive formule difficili alla lavagna – *that's his way*, dopotutto – e proviamo ad avvicinarci: il libro di Carlo Penco ci aiuterà a trovare la strada e a non demoralizzarci, e soprattutto a non perdere un'ottima occasione per capire.

Carlo Penco, «Frege», Carocci, Roma, pagg. 226, € 16,00.